INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO - UNIVERSIDADE DE LISBOA

ESTATÍSTICA I – 2.º Ano/GES FIN – 2.º Semestre 2018/19 – Exame - Época de Recurso

NOME: ______________________________ **N.º:**________

Atenção: Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 1 valor, uma resposta errada vale -0.25 valores. Note que nestas perguntas apenas uma resposta está correta.

Cotações:

1.	2.	3.a)	b)	4.a)	b)	5.a)	b)	6.a)	b)	7.a)	b)	8.a)	b)	Total
1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	20

---

1. Sejam A e B dois acontecimentos no espaço de resultados Ω com probabilidades $P(A) = 3/4$ e $P(B) = 1/3$. Mostre que $1/9 \leq P(B|A) \leq 4/9$.

RESPOSTA 1. $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$

Note-se que $P(A \cap B) \leq P(B) = 1/3$ porque $A \cap B \subset B$.Consequentemente $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) \leq (1/3)/(3/4) = 4/9$.

Por outro lado uma vez que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, nós temos $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. Note-se que $P(A \cup B) \leq 1$, logo $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1 = 3/4 + 1/3 - 1 = 1/12$.

Consequentemente $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) \geq (1/12)/(3/4) = 1/9$.

VSFF

2. O tempo, em horas, que um aluno de uma determinada universidade despende no Instagram por dia é uma variável aleatória X com função densidade

$$f_X(x) = e^{-x}$$

Numa amostra casual de 5 alunos desta universidade, qual a probabilidade da média dos tempos despendidos por estes alunos no Instagram ser inferior a 2 horas?

RESPOSTA 2. Seja X_i ="o tempo, em horas, que o aluno i da amostra despende no Instagram por dia". A partir de $f_X(x)$, conclui-se que $X_i \sim Exp(\lambda = 1)$, $i = 1, ..., 5$. Então, $\sum_{i=1}^{5} X_i \sim G\left(n = 5, \lambda = 1\right)$. Então, tem-se:

$$\begin{aligned} P\left(\overline{X} < 2\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{5} X_i < 10\right) = P\left(2\sum_{i=1}^{5} X_i < 20\right) = P\left(\chi^2_{10} < 20\right) = \\ &= 1 - P\left(\chi^2_{10} \geq 20\right) = 1 - 0.025 = 0.975 \end{aligned}$$

3. Um homem tem cinco moedas, duas das quais têm faces nos dois lados, uma tem duas coroas nos dois lados, e duas são normais (e não enviesadas). Ele fecha os olhos, escolhe uma moeda aleatoriamente, e lança-a.

a) Qual é a probabilidade de sair face no lado de cima?
☐ **i)** 1/5. ☐ **ii)** 2/5.
☒ **iii)** 3/5. ☐ **iv)** 4/5.
☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

b) Ele abre os olhos e vê que o lado de cima da moeda mostra uma coroa; qual é a probabilidade de no outro lado da moeda estar uma coroa?

RESPOSTA 3.b) Considere-se os acontecimentos M_1- foi escolhida uma moeda com face nos dois lados, M_2-foi escolhida uma moeda com coroas nos dois lados, M_3-foi escolhida uma moeda normal, C-sair Coroas, F-sair Faces. Logo $P(C|M_1) = 0$, $P(C|M_2) = 1$, $P(C|M_3) = 1/2$, $P(M_1) = 2/5, P(M_2) = 1/5, P(M_3) = 2/5$.

Pelo teorema da probabilidade total nós temos $P(C) = P(C|M_1)P(M_1)+P(C|M_2)P(M_2)+P(C|M_3)P(M_3) = 1/5 \times 1 + (2/5) \times (1/2) = 2/5$

Consequentemente pelo teorema de Bayes

$$P(M_2|C) = \frac{P(C|M_2)P(M_2)}{P(C)} = \frac{1/5}{2/5} = \frac{1}{2}.$$

4. a) Seja Y uma variável aleatória com função de distribuição $F_Y(y)$. Assinale a opção verdadeira:

☐ **i)** $F_Y(y)$ é, necessariamente, uma função contínua em todo o seu domínio.

☐ **ii)** Sejam a e b números reais tais que $a < b$. A identidade $P(a < Y \leq b) = F_Y(b) - F_Y(a)$ nem sempre se verifica.

☐ **iii)** $F_Y(a) - F_Y(a^-) > 0$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, com $F_Y(a^-) = \lim_{y \to a^-} F_Y(y)$.

☒ **iv)** Sejam a e b números reais tais que $a < b$. A identidade $P(a < Y \leq b) = P(a \leq Y \leq b)$ nem sempre se verifica.

☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

b) Considere a seguinte função densidade para uma outra variável aleatória X:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & (0 < x < 1) \\ 2 - x & (1 < x < 2) \\ 0 & (\text{outros } x) \end{cases} .$$

Demonstre que k tem de ser igual a 1. Obtenha a função de distribuição de X.

RESPOSTA 4.b) Para $f_X(x)$ ser uma função densidade é necessário que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_0^2 f_X(x)dx = 1$. Então, tem-se que

$$\int_0^2 f_X(x)dx = \int_0^1 kxdx + \int_1^2 (2 - x)\, dx = \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$$

Logo, k tem de ser igual a 1 de modo a que $\int_0^2 f_X(x)dx = \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Para $k = 1$, a função de distribuição de X é

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \frac{x^2}{2} & (0 < x \leq 1) \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & (1 < x \leq 2) \\ 1 & (x > 2) \end{cases} .$$

5. Seja X uma variável aleatória com função probabilidade dada por

$$f_X(x) = \frac{x}{10} \quad (x = 1, 2, 3, 4).$$

a) A mediana de X é igual a...
   ☐ **i) ...**1. ☐ **ii) ...**2.
   ☐ **iii) ...**2.5. ☒ **iv) ...**3.
   ☐ **v) ...**nenhuma das alternativas anteriores.

b) Considere agora uma outra variável aleatória Y com probabilidades $P(Y = 0) = \frac{1}{3}$ e $P(Y = 1) = \frac{2}{3}$. Sabendo que X e Y são independentes, calcule $E(XY)$.

RESPOSTA 5.b) Como X e Y são independentes, $E(XY) = E(X)E(Y)$. Portanto, basta calcular o valor esperado de cada uma das variáveis aleatórias:

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{2}{10} + 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{4}{10} = 3 \\ E(Y) &= 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Logo, $E(XY) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$.

6. Uma loja de telecomunicações vende apenas telemóveis da marca A e da marca B. Seja X e Y o número de telemóveis vendidos diariamente nessa loja da marca A e da marca B, respetivamente. A função de probabilidade conjunta de (X, Y) encontra-se resumida no quadro seguinte:

y\x	**0**	**1**	**2**
0	0.66	0.06	0.04
1	0.09	0.06	0.01
2	0.05	0.02	0.01

a) Qual o valor de $f_{Y|X=2}(0)$?
☒ **i) ...**$\frac{2}{3}$. ☐ **ii) ...**0.04.
☐ **iii) ...**0.05. ☐ **iv) ...**$\frac{5}{8}$.
☐ **v) ...**nenhuma das alternativas anteriores.

b) Determine a função de probabilidade do número total de telemóveis vendidos diariamente nesta loja de telecomunicações.

RESPOSTA 6.b) Seja $Z = X + Y$. A função de probabilidade de Z vai ser dada por:

$$\begin{aligned}
f_Z(0) &= f_{X,Y}(0,0) = 0.66 \\
f_Z(1) &= f_{X,Y}(1,0) + f_{X,Y}(0,1) = 0.15 \\
f_Z(2) &= f_{X,Y}(2,0) + f_{X,Y}(0,2) + f_{X,Y}(1,1) = 0.15 \\
f_Z(3) &= f_{X,Y}(1,2) + f_{X,Y}(2,1) = 0.03 \\
f_Z(4) &= f_{X,Y}(2,2) = 0.01
\end{aligned}$$

7. O intervalo de tempo, em minutos, entre a passagem de dois comboios numa estação de metro tem, em horas de ponta, distribuição uniforme no intervalo $(5, 15)$.

a) Sabendo que o último comboio passou há oito minutos, qual é a probabilidade de se ter de esperar pelo menos mais cinco minutos pelo próximo comboio?
☒ **i)** 2/7. ☐ **ii)** 4/9.
☐ **iii)** 5/6. ☐ **iv)** 3/8.
☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

b) Admitindo que os intervalos de tempo entre passagens sucessivas dos comboios são variáveis aleatórias independentes, utilize o teorema do limite central para calcular o valor aproximado da probabilidade da média dos 99 intervalos de tempo entre 100 passagens exceder 9 minutos.

RESPOSTA 7.b) A probabilidade pedida é dada por $P(\bar{X} > 9)$. Note que $n = 99$, $E(X) = (5+15)/2 = 10$, $Var(X) = (15-5)^2/12 = 25/3$. Logo, pelo teorema do limite central

$$P(\bar{X} > 9) = P(\frac{\sqrt{99}\left(\bar{X} - 10\right)}{\sqrt{\frac{25}{3}}} > \frac{\sqrt{99}\,(9-10)}{\sqrt{\frac{25}{3}}}) \simeq 1 - \Phi\left(-3.45\right) = \Phi\left(3.45\right) = 0.9997.$$

8. Uma empresa faz reparações de aparelhos de ar condicionado ao domicílio. Verificou-se que o tempo de reparação de cada aparelho segue a distribuição normal com uma média de 60 minutos e um desvio padrão de 10 minutos. Uma amostra aleatória de quatro reparações foi obtida.

a) A probabilidade (arredondada a 4 casas decimais) do tempo de reparação médio da amostra ser superior a 65 minutos é dada por...
☐ **i)** 0.8413. ☒ **ii)** 0.1587.
☐ **iii)** 0.5398. ☐ **iv)** 0.4602.
☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

b) Qual é a probabilidade de mais de duas dessas reparações terem um tempo de reparação superior a 65 minutos?

RESPOSTA 8.b) Seja X o tempo de reparação. Uma vez que a $X \sim N(60, 100)$, $P(X > 65) = P\left(\frac{X-60}{10} > \frac{65-60}{10}\right) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$.

A distribuição do número de reparações Y é binomial com $n = 4$ e $\theta = P(X > 65) = 0.3085$.

Nós queremos

$$\begin{aligned} P(Y &> 2) = P(Y = 3) + P(Y = 4) \\ &= \frac{4!}{1!3!}(0.3085)^3 \times (1 - 0.3085)^1 + \frac{4!}{0!4!}(0.3085)^4 \times (1 - 0.3085)^0 \\ &= 0.090269285. \end{aligned}$$

FIM